第 42 講　総合問題(2)

1 ［1］ 1，2，3，4，5 の 5 種類の数字を，同じ数字をくり返し用いることを許して 3 桁の整数をつくるとき，各位の数字の和が 3 の倍数になる整数は何個あるか．

［2］ 無作為に 5 人選んだとき，その中に誕生月が同じ人がいる確率を求めよ．ただし，誕生月が何月なのかは，1 月から 12 月まですべて同じ確率とする．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1] $f(x)=2x^3-3x^2-6x+4$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 多項式 $f(x)$ を x^2-x-1 で割ったときの商 $Q(x)$ と余り $R(x)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の極値と，そのときの x の値を求めよ．

[2] (1) 関数 $y=|x^2-1|$ のグラフをかけ．

(2) 関数 $y=||x^2-1|-3|$ のグラフをかき，そのグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 △OAB において，辺 OA を1：2に内分する点を P，辺 OB の長さを 1，内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=k$ とする．このとき，辺 OB 上の点 Q に関して，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OB}$ のとき，$\overrightarrow{PQ}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ と s を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{PQ}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|$ を満たす点 Q が辺 OB 上（点 Q が O または B と一致する場合を含む）にただ1つ存在するような k の値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 42 講　総合問題(2)

［1］ 4 個の数字 1, 2, 3, 4 を用いて 4 桁の整数を作る．ただし，同じ数字をくり返し用いてもよいとする．このように作った 4 桁の整数は全部で **アイウ** 個あり，4 桁の整数が 3 の倍数になる整数は全部で **エオ** 個ある．

［2］ $f(x)=-x^3+x^2+6x+9\ (-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{カキク}+\boxed{ケコ}\sqrt{19}}{27}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 42 講　総合問題(2)

1 ［1］ 1，2，3，4，5 の 5 種類の数字を，同じ数字をくり返し用いることを許して 3 桁の整数をつくるとき，各位の数字の和が 3 の倍数になる整数は何個あるか．

3 桁の各位の数字の和が 3 の倍数となるときの数字の組合せと，その順列を考える．

和が 3 のとき	組合せ	(1，1，1)	順列	1 通り
和が 6 のとき	組合せ	(1，1，4)	順列	$\frac{3!}{2!}=3$ 通り
		(1，2，3)	順列	$3!=6$ 通り
		(2，2，2)	順列	1 通り
和が 9 のとき	組合せ	(1，3，5)	順列	6 通り
		(1，4，4)	順列	3 通り
		(2，2，5)	順列	3 通り
		(2，3，4)	順列	6 通り
		(3，3，3)	順列	1 通り
和が 12 のとき	組合せ	(2，5，5)	順列	3 通り
		(3，4，5)	順列	6 通り
		(4，4，4)	順列	1 通り
和が 15 のとき	組合せ	(5，5，5)	順列	1 通り

以上より　**41 個**

(別解)　1，2，3，4，5 の数字を次の集合に分ける

3 で割ると余り 0 になる集合　$G_0=\{3\}$

3 で割ると余り 1 になる集合　$G_1=\{1,\ 4\}$

3 で割ると余り 2 になる集合　$G_2=\{2,\ 5\}$

数字の和が 3 の倍数となる 3 つの数字の選び方は以下．

(i)　G_0，G_1，G_2 のいずれか 1 つの集合から 3 つの数字を選ぶ

(ii)　G_0，G_1，G_2 から 1 つずつ，計 3 つの数字を選ぶ

(i)のとき　3 桁の数字の決め方は　$1^3+2^3+2^3=17$（通り）

(ii)のとき　3 桁の数字の選び方は　$1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=4$（通り）

その順列は　$3!=6$（通り）　　よって　$4\times6=24$（通り）

以上より，各位の数字の和が 3 の倍数になる整数は　$17+24=41$（個）

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

> **1** ［2］　無作為に5人選んだとき，その中に誕生月が同じ人がいる確率を求めよ．ただし，誕生月が何月なのかは，1月から12月まですべて同じ確率とする．

無作為に5人選んだとき，それぞれの人の誕生月は12通り．
よって5人の誕生月は　12^5 通り
このうち，全員誕生月が異なるのは，1月～12月のうち5人の異なる誕生月を選ぶときで

$${}_{12}C_5\times 5!={}_{12}P_5=12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8 \text{（通り）}$$

よって求める確率は　$1-\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{12^5}=1-\dfrac{55}{144}=\boldsymbol{\dfrac{89}{144}}$

> **2** ［1］　$f(x)=2x^3-3x^2-6x+4$ とするとき，以下の問いに答えよ．
> ⑴　多項式 $f(x)$ を x^2-x-1 で割ったときの商 $Q(x)$ と余り $R(x)$ をそれぞれ求めよ．
> ⑵　関数 $f(x)$ の極値と，そのときの x の値を求めよ．

⑴

$$\begin{array}{r} 2x\ -1 \\ x^2-x-1\,\overline{)\,2x^3-3x^2-6x+4} \\ 2x^3-2x^2-2x \\ \hline -x^2-4x+4 \\ -x^2+x+1 \\ \hline -5x+3 \end{array}$$

よって　$\boldsymbol{Q(x)=2x-1}$　　$\boldsymbol{R(x)=-5x+3}$

⑵　$f(x)=2x^3-3x^2-6x+4$　より

$f'(x)=6x^2-6x-6=6(x^2-x-1)$

$x^2-x-1=0$ つまり $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ のとき $f'(x)=0$

$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，増減表は右表．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗
		↑ 極大		↑ 極小	

⑴より　$f(x)=(x^2-x-1)Q(x)+R(x)$

$f(\alpha)=R(\alpha)=-5\alpha+3=-5\cdot\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+3=\dfrac{1+5\sqrt{5}}{2}$

$f(\beta)=R(\beta)=-5\beta+3=-5\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+3=\dfrac{1-5\sqrt{5}}{2}$

よって　$f(x)$ は

極大値　$\boldsymbol{\dfrac{1+5\sqrt{5}}{2}}$　$\left(\boldsymbol{x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}} \text{ **のとき**}\right)$

極小値　$\boldsymbol{\dfrac{1-5\sqrt{5}}{2}}$　$\left(\boldsymbol{x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ **のとき**}\right)$　をとる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［2］ (1) 関数 $y=|x^2-1|$ のグラフをかけ．
(2) 関数 $y=||x^2-1|-3|$ のグラフをかき，そのグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $y=|x^2-1|=|(x+1)(x-1)|=\begin{cases}(x+1)(x-1) & (x\leqq -1,\ 1\leqq x)\\ -(x+1)(x-1) & (-1\leqq x\leqq 1)\end{cases}$

よって　$y=|x^2-1|$ のグラフは右図1.

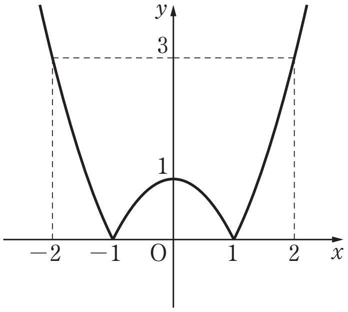


図1

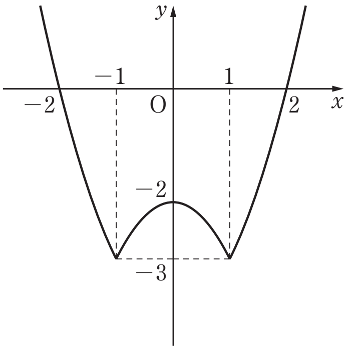
(2) $f(x)=x^2-1$ とおく．

(1)より，$y=|f(x)|$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフの軸より下の部分を上に折り返したものである．

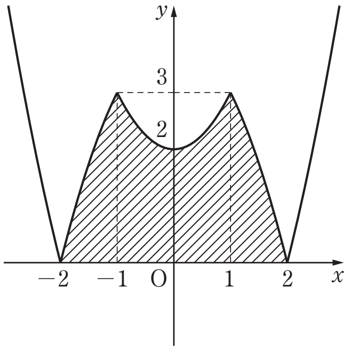
$y=|x^2-1|-3$ のグラフは，$y=|x^2-1|$ のグラフを y 軸方向に -3 平行移動したものであり（下図2），

$y=||x^2-1|-3|$ のグラフは，$y=|x^2-1|-3$ のグラフの x 軸より下の部分を上に折り返したものである．

よって，面積を求める図形は下図3の斜線部分．



$y=|x^2-1|-3$
図2



$y=||x^2-1|-3|$
図3

したがって求める面積は，図1，図3より

$$S=\int_{-2}^{2}\{3-(x^2-1)\}dx-2\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx$$

$$=-\int_{-2}^{2}(x+2)(x-2)dx+2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx$$

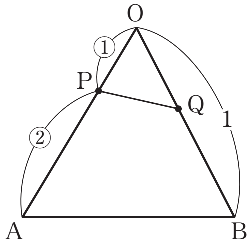
$$=-\left(-\frac{1}{6}\cdot 4^3\right)+2\cdot\left(-\frac{1}{6}\cdot 2^3\right)=\mathbf{8}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　△OAB において，辺 OA を１：２に内分する点を P，辺 OB の長さを 1，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k$ とする．このとき，辺 OB 上の点 Q に関して，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と s を用いて表せ．

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を満たす点 Q が辺 OB 上（点 Q が O または B と一致する場合を含む）にただ１つ存在するような k の値の範囲を求めよ．



(1)　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{s\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$　より

$$\left|s\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

$$s^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\frac{2}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=\frac{1}{9}(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2)$$

$9s^2-6ks=1-2k$　　よって　$9s^2-6ks+2k-1=0$　……①

題意より，２次方程式①を満たす解 s が $0\leqq s\leqq 1$ にただ１つ存在すればよい．

$f(s)=9s^2-6ks+2k-1=9\left(s-\frac{k}{3}\right)^2-k^2+2k-1$　とおく．

軸：$s=\frac{k}{3}$　　$f(0)=2k-1$　　$f(1)=9-6k+2k-1=-4k+8$

(i)　$f(0)\cdot f(1)<0$ のとき

$(2k-1)(-4k+8)<0$　　$(2k-1)(k-2)>0$　　よって　$k<\frac{1}{2}$，$2<k$

(ii)　$f(0)=0$ のとき　　$k=\frac{1}{2}$

このとき　①より　$9s^2-3s=0$　　$s(3s-1)=0$　　$s=0,\ \frac{1}{3}$

よって①は $0\leqq s\leqq 1$ に異なる２実数解をもち不適．

(iii)　$f(1)=0$ のとき　　$k=2$

このとき①より　$9s^2-12s+3=0$　　$(3s-1)(s-1)=0$　　$s=\frac{1}{3},\ 1$

よって①は $0\leqq s\leqq 1$ に異なる２実数解をもち不適．

(iv)　①の判別式 D について　$D=0$ のとき

$(3k)^2-9\cdot(2k-1)=0$　　$k^2-2k+1=0$　　$(k-1)^2=0$　　$k=1$

このとき　$f(0)=1>0$，$f(1)=4>0$，$0\leqq\frac{k}{3}\leqq 1$ より満たす．

(i)～(iv)より　求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{k<\frac{1}{2},\ k=1,\ 2<k}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第42講　総合問題(2)

[1]　4個の数字1，2，3，4を用いて4桁の整数を作る．ただし，同じ数字をくり返し用いてもよいとする．このように作った4桁の整数は全部で **アイウ** 個あり，4桁の整数が3の倍数になる整数は全部で **エオ** 個ある．

[2]　$f(x)=-x^3+x^2+6x+9$　$(-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{カキク}+\boxed{ケコ}\sqrt{19}}{27}$ である．

解答例

[1]　4桁の整数は全部で $4^4=$**256** 個ある．

また，1，2，3，4を，3で割った余りによって次のように分類する．

余り0　…　$G_0=\{3\}$　　余り1　…　$G_1=\{1,\ 4\}$　　余り2　…　$G_2=\{2\}$

4桁の整数が3の倍数，つまり各位の数字の和が3の倍数になる4つの数字の選び方は以下．

(i)　G_0 から4つ　　(ii)　G_0 から2つ，G_1，G_2 から1つずつ

(iii)　G_0 から1つ，G_1 から3つ　　(iv)　G_0 から1つ，G_2 から3つ

(v)　G_1，G_2 から2つずつ

(i)のとき　1通り

(ii)のとき　4つの数字の選び方は　$1^2\times{}_2C_1\times 1=2$ 通り

それぞれの順列は　$\dfrac{4!}{2!}=12$ 通り　　よって　$2\times 12=24$ 通り

(iii)のとき　4つの数字の選び方は　$1\times 2^3=8$ 通り

それぞれの順列は　$\dfrac{4!}{3!}=4$ 通り　　よって　$8\times 4=32$ 通り

(iv)のとき　4つの数字の選び方は　$1\times 1^3=1$ 通り

その順列は　$\dfrac{4!}{3!}=4$ 通り　　よって　$1\times 4=4$ 通り

(v)のとき　4つの数字の選び方は　$2^2\times 1^2=4$ 通り

それぞれの順列は　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通り　　よって　$4\times 6=24$ 通り

以上より，求める個数は　$1+24+32+4+24=$**85** 個

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［2］　$f(x)=-x^3+x^2+6x+9$　より　$f'(x)=-3x^2+2x+6$

$f'(x)=0$ つまり $3x^2-2x-6=0$ となるのは　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{19}}{3}$ のとき

$\sqrt{19}=4.\cdots\cdots$　より　$\dfrac{1-\sqrt{19}}{3}<-1$，$-1<\dfrac{1+\sqrt{19}}{3}<2$

$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{19}}{3}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{19}}{3}$ とおくと，

x	-1	$\cdots$	β	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

$f(x)$ の増減表は右図となるから，最大値は $f(\beta)$ である．

また，$3\beta^2-2\beta-6=0$ より，$f(x)=(3x^2-2x-6)\left(-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}\right)+\dfrac{38}{9}x+\dfrac{29}{3}$

よって求める最大値は　$f(\beta)=\dfrac{38}{9}\beta+\dfrac{29}{3}=\dfrac{38}{9}\cdot\dfrac{1+\sqrt{19}}{3}+\dfrac{29}{3}=\boldsymbol{\dfrac{299+38\sqrt{19}}{27}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。